Γενικές ασκήσεις σχ. Βιβλίου σελίδας 291 – 294

Γ΄ ομάδας

1.

i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x^2-3x+3,\ x\in(0,\ +\infty)$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο Α(1, 1)

ii) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f, C_g στο διάστημα $(0,\ +\infty)$

Λύση

i)

Είναι $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ και $g'(x)=2x-3$

$f(1)=1$ και $g(1)=1$, άρα το σημείο Α(1, 1) είναι κοινό σημείο των C_f, C_g

Επιπλέον είναι $f'(1)=-1$ και $g'(1)=-1$, άρα οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο Α(1, 1)

ii)

Θεωρούμε τη διαφορά

$$h(x)=g(x)-f(x)=x^2-3x+3-\frac{1}{x}=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x}=\frac{(x-1)^3}{x}$$

$h(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$h(x)>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Επομένως : Στο διάστημα (0, 1) είναι $h(x)<0$

$g(x)-f(x)<0$

$g(x)<f(x)$

η Cg χαμηλότερα από την C_f

Ομοίως Στο διάστημα $(1,\ +\infty)$ η Cg ψηλότερα από την C_f

2.

Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με

$f(0) = g(0)$ και $f\,'(x) > g\,'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

να αποδείξετε ότι

$f(x) < g(x)$ στο $(-\infty,\ 0)$ και $f(x) > g(x)$ στο $(0,\ +\infty)$

Λύση

Θεωρούμε τη διαφορά $h(x) = f(x) - g(x),\ \ x \in \mathbb{R}$

Οπότε $h(0) = f(0) - g(0) = 0$

Είναι $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ h γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Στο $(-\infty,\ 0)$: $x < 0 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x) < h(0) \Rightarrow f(x) - g(x) < 0$

$f(x) < g(x)$

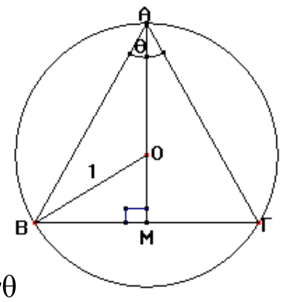
Στο $(0,\ +\infty)$: $x > 0 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Rightarrow f(x) - g(x) > 0$

$f(x) > g(x)$

3.

Ισοσκελές τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι $E = \etaμθ(1 + συνθ)$. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $θ \in (0, \ π)$ για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Λύση



$\hat{θ} = \dfrac{B\hat{O}Γ}{2} = B\hat{O}M$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΜ έχουμε

ΒΜ = ΒΟ ημθ και ΟΜ = ΒΟ συνθ

ΒΜ = ημθ και ΟΜ = συνθ

Αλλά ΒΓ = 2ΒΜ = 2ημθ και ΑΜ = ΑΟ + ΟΜ = 1+ συνθ

Επομένως, $E = \dfrac{1}{2}\ BΓ \cdot AM =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 2ημθ \cdot (1 + συνθ)$

$= ημθ(1 + συνθ)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(θ) = ημθ(1 + συνθ)$ και αναζητάμε τη θέση του μέγιστου.

$E'(θ) = συν^2θ - ημ^2θ + συνθ = συν2θ + συνθ$

$E'(θ) = 0 \iff συν2θ + συνθ = 0$

$συν2θ = -συνθ$

$συν2θ = συν(π - θ)$

$2θ = 2κπ + π - θ$ ή $2θ = 2κπ - π + θ, \quad κ \in \mathbb{Z}$

$θ = \dfrac{2κπ}{3} + \dfrac{π}{3}$ ή $θ = 2κπ - π$

και επειδή $0 < θ < π$, θα είναι $θ = \dfrac{π}{3}$

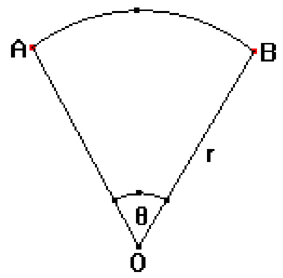
Πρόσημο της Ε΄ και μονοτονία της Ε :

θ	0	π/3	π
Ε΄	+	0	−
Ε	↗	|	↘

Μέγιστο για $θ = \dfrac{π}{3}$, το $E\left(\dfrac{π}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

4.

Ένα σύρμα μήκους 20 m διατίθεται για την περίφραξη ενός ανθόκηπου σχήματος κυκλικού τομέα. Να βρείτε την ακτίνα r του κύκλου, αν επιθυμούμε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια του κήπου



Λύση

Το μήκος ℓ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ του τομέα θ rad είναι $\ell = r\theta$

Η περίμετρος του τομέα είναι $2r + \ell = 20$

$2r + r\theta = 20$

Αφού ζητάμε την τιμή του r, απαλλασσόμαστε από το θ.

$r\theta = 20 - 2r \;\Rightarrow\; \theta = \dfrac{20-2r}{r}$ **(1)**

Το εμβαδόν του τομέα είναι $E = \dfrac{1}{2}\theta r^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} E = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{20-2r}{r}\cdot r^2 = 10r - r^2$

Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $E(r) = 10r - r^2$, $0 < r < 10$ της οποίας αναζητάμε το μέγιστο

$E'(r) = 10 - 2r$

$E'(r) = 0 \;\Leftrightarrow\; 10 - 2r = 0 \;\Leftrightarrow\; r = 5$

Πρόσημο της E΄ και μονοτονία της E :

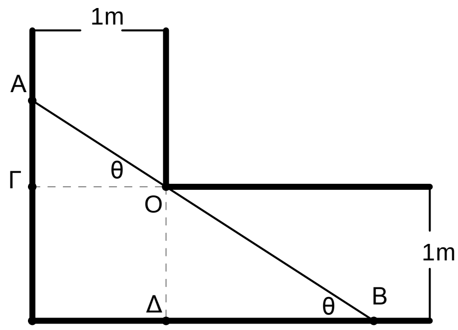
r	0		5		10
E΄		+	0	−	
E		↗		↘	

Μέγιστο για $r = 5$ το $E(5) = 25\ m^2$

Άρα η μέγιστη επιφάνεια του ανθόκηπου προκύπτει όταν $r = 5$ m

5.

Δύο διάδρομοι πλάτους 1m τέμνονται κάθετα. Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στην γωνία



Υπόδειξη :

i) Να εκφράσετε τα ΟΑ , ΟΒ συναρτήσει της γωνίας θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ii) Να αποδείξετε ότι $(AB) = f(\theta) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

iii) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ, για την οποία το ΑΒ γίνεται ελάχιστο

Λύση

i)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ : $(O\Gamma) = (OA)\,\sigma\upsilon\nu\theta$

$1 = (OA)\,\sigma\upsilon\nu\theta$

$(OA) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΔ : $(O\Delta) = (OB)\,\eta\mu\theta$

$1 = (OB)\,\eta\mu\theta$

$(OB) = \frac{1}{\eta\mu\theta}$

ii)

$(AB) = (OA) + (OB) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1}{\eta\mu\theta}$, οπότε $(AB) = f(\theta) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

iii)

Η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(\theta) = -\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta} + \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{\eta\mu^3\theta - \sigma\upsilon\nu^3\theta}{\eta\mu^2\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\theta}$

$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\theta - \sigma\upsilon\nu^3\theta = 0$

$\eta\mu^3\theta = \sigma\upsilon\nu^3\theta$

$\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta$

$\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, αφού $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f :

θ	0		π/4		π/2
f΄		−	0	+	
f		↘		↗	

Ελάχιστο για $x = \frac{\pi}{4}$, το $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$

Επομένως το μεγαλύτερο δυνατό μήκος της σκάλας, για να μπορέσει να στρίψει στην γωνία είναι $(AB) = 2\sqrt{2}$ m

6.

i) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^{\alpha}$ για κάθε $\alpha > e$

iii) Να αποδείξετε ότι για $x>0$ ισχύει $2^x = x^2 \Leftrightarrow f(x)=f(2)$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x = x^2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$, $x_2 = 4$

Λύση

i)

$D_f = (0,\ +\infty)$ και f συνεχής (πηλίκο συνεχών)

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$$
$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow x>e$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\ln x)2x}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x-3=0 \Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2\ln x-3>0 \Leftrightarrow \ln x>\frac{3}{2} \Leftrightarrow x>e^{\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to 0}(\ln x\cdot\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}\ln x.\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=(-\infty)(+\infty)=-\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

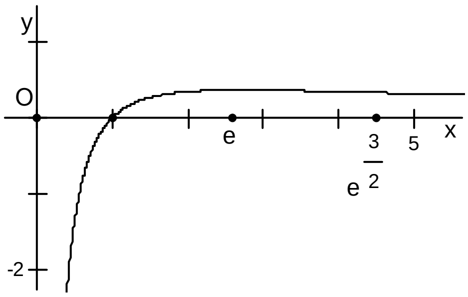
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Πίνακας προσήμων και μεταβολών

x	0		e		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	
f''		$-$		$-$	0	$+$	
f							

Μέγ. $f(e)=\dfrac{1}{e}$, σ.κ $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$



ii)

Αρκεί να αποδείξουμε $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^{\alpha}$

$\ln\alpha^{\alpha+1} > \ln(\alpha+1)^{\alpha}$

$(\alpha+1)\ln\alpha > \alpha\ln(\alpha+1)$

$\dfrac{\ln\alpha}{\alpha} > \dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1}$

$f(\alpha) > f(\alpha+1)$ που ισχύει, αφού $\alpha < \alpha+1$ και

f γν. φθίνουσα στο $(e, +\infty)$

Προσπαθούμε να εμφανίσουμε τιμές της f

iii)

$2^x = x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln x^2$

$x\ln 2 = 2\ln x$

$\dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln x}{x}$

$f(x) = f(2)$ **(A)**

Οι $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ είναι προφανείς ρίζες της εξίσωσης $2^x = x^2$, αφού την επαληθεύουν ($2^2 = 2^2$ και $2^4 = 4^2$)

f γν.αύξουσα στο $(0, e)$ $\Rightarrow$ η f είναι 1 – 1 στο $(0, e)$.

Και επειδή $2 \in (0, e)$, η (Α) $\Leftrightarrow$ $x = 2$

f γν.φθίνουσα στο $(e, +\infty)$ $\Rightarrow$ η f είναι 1 – 1 στο $(e, +\infty)$.

Και επειδή $4 \in (e, +\infty)$, η (Α) $\Leftrightarrow$ $x = 4$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(2)$ έχει ακριβώς τις ρίζες $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Άρα και η ισοδύναμή της $2^x = x^2$

7.

i) Αν $\alpha, \beta > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x + \beta^x \geq 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$

ii) Αν $\alpha > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x \geq x + 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

Λύση

> Θυμίζουμε :
> Από ανισότητα, για να αποδείξουμε ισότητα, υποψιαζόμαστε Fermat.

i)

$\alpha^x + \beta^x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha^x + \beta^x - 2 \geq 0 \quad$ **(1)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + \beta^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $f(0) = \alpha^0 + \beta^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

(1) $\Rightarrow$ $f(x) \geq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ το $f(0)$ είναι ελάχιστο της f.
Και επειδή το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη στο 0, κατά το Θ. Fermat $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$ **(2)**

Αλλά $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln\alpha + \beta^x \cdot \ln\beta$ $\Rightarrow$ $f'(0) = \alpha^0 \cdot \ln\alpha + \beta^0 \cdot \ln\beta$
$f'(0) = \ln\alpha + \ln\beta$
$f'(0) = \ln(\alpha\beta)$ **(3)**

(2), (3) $\Rightarrow$ $\ln(\alpha\beta) = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha\beta = 1$

ii)

$\alpha^x \geq x + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^x - x - 1 \geq 0 \quad$ **(4)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \alpha^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $g(0) = \alpha^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

(4) $\Rightarrow$ $g(x) \geq g(0)$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ το $g(0)$ είναι ελάχιστο της g.
Και επειδή το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $D_g = \mathbb{R}$ και g παραγωγίσιμη στο 0, κατά το Θ. Fermat $\Rightarrow$ $g'(0) = 0$ **(5)**

Αλλά $g'(x) = \alpha^x \ln\alpha - 1$ $\Rightarrow$ $g'(0) = \alpha^0 \ln\alpha - 1$
$g'(0) = \ln\alpha - 1$ **(6)**

(5), (6) $\Rightarrow$ $\ln\alpha - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $\ln\alpha = 1$ $\Rightarrow$ $\alpha = e$

8.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι κυρτή, ενώ η $g(x) = \ln x$ είναι κοίλη

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, 1)$ και της C_g στο $B(1, 0)$.

iii) Να αποδείξετε ότι

α) $e^x \geq x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$ **β)** $\ln x \leq x - 1, \quad x \in (0, +\infty)$

και να εξετάσετε πότε ισχύουν οι ισότητες.

iv) Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g

Λύση

i)

$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = (0, +\infty)$

$f'(x) = e^x$ στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f''(x) = e^x > 0$ στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

$g'(x) = \dfrac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ $g''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ στο $(0, +\infty)$

$\Rightarrow$ g κοίλη στο $(0, +\infty)$

ii)

$f(0) = e^0 = 1$ και $f'(0) = e^0 = 1$

Εφαπτομένη της C_f στο $A(0, 1)$: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 1 = 1(x - 0)$

$y = x$

$g(1) = \ln 1 = 0$ και $g'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

Εφαπτομένη της C_g στο $B(1, 0)$: $y - g(1) = g'(1)(x - 1)$

$y - 0 = 1\cdot(x - 1)$

$y = x - 1$

iii)

α) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η C_f θα είναι ψηλότερα από την εφαπτομένη στο A, δηλαδή $f(x) \geq x + 1$

$e^x \geq x + 1$ με το ίσον να ισχύει όταν $x = 0$

β) Επειδή η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$, η Cg θα είναι χαμηλότερα από την εφαπτομένη στο B, δηλαδή $g(x) \leq x - 1$

$\ln x \leq x - 1$ με το ίσον να ισχύει όταν $x = 1$

iv)

Αποδείχθηκε ότι $e^x \geq x + 1 > x - 1 \geq \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ $\Rightarrow$

$e^x > \ln x$

$f(x) > g(x)$ άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g για κάθε $x > 0$

9.

i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = e^x - \lambda x$, $\lambda > 0$

ii) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$e^x \ge \lambda x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

iii) Για την τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω, να δείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^x$.

Λύση

i)

$D_f = \mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

$f'(x) = e^x - \lambda$

$f'(x) = 0 \iff e^x = \lambda \iff x = \ln\lambda$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		$\ln\lambda$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

ελ. το $f(\ln\lambda) = e^{\ln\lambda} - \lambda\ln\lambda = \lambda - \lambda\ln\lambda$

ii)

Θέλουμε να ισχύει $e^x \ge \lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$e^x - \lambda x \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αρκεί λοιπόν η ελάχιστη τιμή της f να είναι ≥ 0

Δηλαδή, αρκεί $\lambda - \lambda\ln\lambda \ge 0$

$\lambda(1 - \ln\lambda) \ge 0$

$1 - \ln\lambda \ge 0$

$\ln\lambda \le 1$

$\lambda \le e$

Επομένως, η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι η $\lambda = e$

iii)

Για να εφάπτεται η ευθεία $y = ex$ στη C_g, αρκεί να υπάρχει x_o έτσι ώστε

$g(x_o) = y(x_o)$ και $g'(x_o) = e$

$e^{x_o} = e\,x_o$ και $e^{x_o} = e$

$e = e\,x_o$ και $e^{x_o} = e$

$x_o = 1$

Άρα η ευθεία $y = ex$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $(1, e)$

10.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 \eta\mu\dfrac{1}{x}\ , & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και στη συνέχεια ότι η ευθεία $y=0$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0, 0)$

ii) Ο άξονας $x'x$ έχει με την C_f άπειρα κοινά σημεία, παρόλο που εφάπτεται της C_f

iii) Η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Λύση

i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x\ \eta\mu\frac{1}{x}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως $\left|x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| = |x|\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| \le |x| \quad\Rightarrow\quad -|x| \le x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x} \le |x|$

Και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0=\lim\limits_{x\to 0}|x|$, κατά το κριτήριο της παρεμβολής,

θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ \eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$

(1) $\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0 \quad\Rightarrow\quad f'(0)=0$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $O(0, 0)$ είναι $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow$

$y-0 = 0\cdot(0-0)$

$y=0$

ii)

Τα κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$

$\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$

$\eta\mu\dfrac{1}{x}=\eta\mu 0$

$\dfrac{1}{x}=\kappa\pi,\quad \kappa\in\mathbb{Z}^{\bullet} \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{1}{\kappa\pi}\ ,\quad \kappa\in\mathbb{Z}^{\bullet}$ άπειρες τιμές

iii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Θέτουμε $\dfrac{1}{x}=u$. Οπότε $u\to 0$

(2) $\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{1}{u^2}\eta\mu u-\dfrac{1}{u}\right)=$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\, u - 1}{2u} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0 \quad \text{(γνωστό όριο)}$$

Ομοίως έχουμε και $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$

11.

A. Έστω συνάρτηση φ τέτοια, ώστε

$\varphi(0)=0, \quad \varphi'(0)=0 \quad$ και $\quad \varphi''(x)+\varphi(x)=0,\;$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(1)**

Να αποδείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση $\psi(x)=[\varphi'(x)]^2+[\varphi(x)]^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

ii) $\varphi(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

B. Έστω δύο συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε :

$f(0)=0, \quad f'(0)=1 \quad$ και $\quad f''(x)+f(x)=0 \quad$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$g(0)=1, \quad g'(0)=0 \quad$ και $\quad g''(x)+g(x)=0 \quad$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι :

i) Οι συναρτήσεις $\varphi(x)=f(x)-\eta\mu x$ και $\psi(x)=g(x)-\sigma\upsilon\nu x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος του (Α)

ii) $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Λύση

A.

i)

$\psi'(x)=2\varphi'(x)\varphi''(x)+2\varphi(x)\varphi'(x)$

$=2\varphi'(x)[\varphi''(x)+\varphi(x)]$

$=2\varphi'(x)\cdot 0 = 0$

Επομένως η ψ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $\psi(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(2)** $\Rightarrow$

$(\varphi'(x))^2+(\varphi(x))^2=c$

και για $x=0$, $(\varphi'(0))^2+(\varphi(0))^2=c$

$0+0=c$

$c=0$

(2) $\Rightarrow$ $\psi(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii)

$\psi(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $(\varphi'(x))^2+(\varphi(x))^2=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$\varphi'(x)=0$ και $\varphi(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

B.
i)

Από την $f''(x) + f(x) = 0 \Rightarrow f''(0) + f(0) = 0$
$f''(0) + 0 = 0$
$f''(0) = 0$

Από την $\varphi(x) = f(x) - ημx \Rightarrow \varphi(0) = f(0) - ημ0$
$\varphi(0) = 0 - 0$
$\underline{\varphi(0) = 0}$

$\varphi(x) = f(x) - ημx \Rightarrow \varphi'(x) = f'(x) - συνx$

Άρα $\varphi'(0) = f'(0) - συν0$
$\varphi'(0) = 1 - 1$
$\underline{\varphi'(0) = 0}$

$\varphi(x) = f(x) - ημx \Rightarrow \varphi'(x) = f'(x) - συνx$ και $\varphi''(x) = f''(x) + ημx$

Άρα $\varphi''(x) + \varphi(x) = f''(x) + ημx + f(x) - ημx = f''(x) + f(x) = 0$ από υπόθεση

Από την $g''(x) + g(x) = 0 \Rightarrow g''(0) + g(0) = 0$
$g''(0) + 1 = 0$
$g''(0) = -1$

Από την $\psi(x) = g(x) - συνx \Rightarrow \psi(0) = g(0) - συν0$
$\psi(0) = 1 - 1$
$\underline{\psi(0) = 0}$

$\psi(x) = g(x) - συνx \Rightarrow \psi'(x) = g'(x) + ημx$
Άρα $\psi'(0) = g'(0) + ημ0$
$\psi'(0) = 0 + 0$
$\underline{\psi'(0) = 0}$

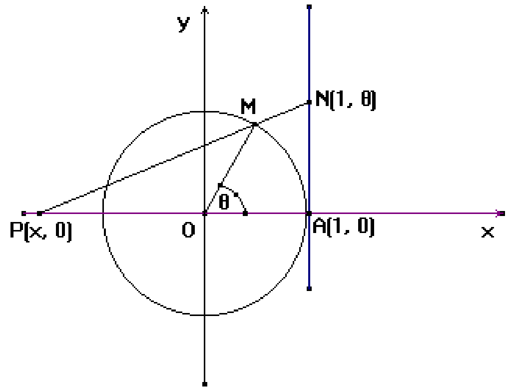
$\psi(x) = g(x) - συνx \Rightarrow \psi'(x) = g'(x) + ημx$ και $\psi''(x) = g''(x) + συνx$

Άρα $\psi''(x) + \psi''(x) = g''(x) + συνx + g(x) - συνx = g''(x) + g(x = 0$ από υπόθεση

ii)
Με βάση το Α ερώτημα θα είναι $\varphi(x) = 0$ και $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow$
$f(x) - ημx = 0$ και $g(x) - συνx = 0$
$f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

12.

Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 1cm και η ευθεία (ε) εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο A. Το τόξο AM είναι θ rad και το ευθύγραμμο τμήμα AN είναι θ cm. Η ευθεία MN τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο P(x, 0). Να δείξετε ότι :



i) $x = \dfrac{\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta - \eta\mu\theta} = x(\theta)$

ii) $\lim\limits_{\theta\to 0} x(\theta) = -2$

Λύση

i)

Οι συντεταγμένες του σημείου M είναι M(συνθ, ημθ).

Είναι $x_{\overline{PM}} = x_M - x_P = \sigma\upsilon\nu\theta - x$ και $y_{\overline{PM}} = y_M - y_P = \eta\mu\theta$

$x_{\overline{PN}} = x_N - x_P = 1 - x$ και $y_{\overline{PN}} = y_N - y_P = \theta$

$\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ συγγραμμικά $\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = 0$

$$\begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta - x & \eta\mu\theta \\ 1 - x & \theta \end{vmatrix} = 0$$

$$\theta\sigma\upsilon\nu\theta - x\theta - \eta\mu\theta + x\,\eta\mu\theta = 0$$

$$\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta = x(\theta - \eta\mu\theta)$$

$$x = \frac{\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta - \eta\mu\theta} = x(\theta)$$

ii)

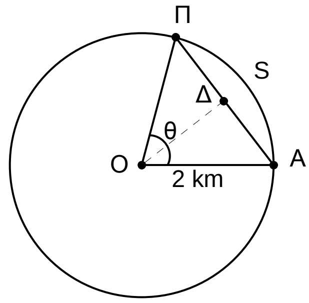
$$\lim_{\theta\to 0} x(\theta) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta - \eta\mu\theta} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{(\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)'}{(\theta - \eta\mu\theta)'}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\theta - \theta\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-\theta\eta\mu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{(-\theta\eta\mu\theta)'}{(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)'} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-\eta\mu\theta - \theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{(-\eta\mu\theta - \theta\sigma\upsilon\nu\theta)'}{(\eta\mu\theta)'} = \lim_{\theta\to 0}\frac{-\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta + \theta\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = -2$$

13.



Ένας πεζοπόρος Π ξεκινάει από ένα σημείο Α και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας $\rho = 2\text{km}$ με ταχύτητα $\upsilon = 4\text{km/h}$. Αν S είναι το μήκος του τόξου ΑΠ και ℓ το μήκος της απόστασης ΑΠ του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης τη χρονική στιγμή t :

Α. Να αποδείξετε ότι

i) $\theta = \dfrac{S}{2}$ και $\ell = 4\eta\mu\dfrac{\theta}{2}$ **ii)** $S = 4t$, $\theta = 2t$ και $\ell = 4\eta\mu t$

Β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ℓ ως προς τον χρόνο t. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ℓ ως προς τον χρόνο t, όταν

α) $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ **β)** $\theta = \pi$ και **γ)** $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$

Λύση

Α.

i)

Έστω $\overset{\frown}{\text{ΑΠ}} = \theta \text{ rad}$. Τότε $S = \rho\,\theta = 2\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{S}{2}$ **(1)**

Φέρνουμε ΟΔ ⊥ ΑΠ.

Στο τρίγωνο ΟΑΔ : $\eta\mu\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΟΑ}} \Leftrightarrow \eta\mu\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{2} \Leftrightarrow \ell = 4\eta\mu\dfrac{\theta}{2}$ **(2)**

ii)

Επειδή ο πεζοπόρος βαδίζει με ταχύτητα $\upsilon = 4\text{km/h}$, τη χρονική στιγμή t θα έχει διανύσει διάστημα $S = 4t$, οπότε η (1) γίνεται $\theta = \dfrac{4t}{2} \Rightarrow \theta = 2t$ **(3)**

$$(2) \Rightarrow \ell = 4\eta\mu\frac{2t}{2} = 4\eta\mu t$$

Β.

$\ell = 4\eta\mu t \Rightarrow \ell'(t) = 4\sigma\upsilon\nu t$ **(4)**

α) Όταν $\theta = \dfrac{2\pi}{3} \overset{(3)}{\Rightarrow} 2t = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$

$$(4) \Rightarrow \ell'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 4.\ \frac{1}{2} = 2 \text{ km/h}$$

β) Όταν $\theta = \pi \overset{(3)}{\Rightarrow} 2t = \pi \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$

$$(4) \Rightarrow \ell'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 4.\ 0 = \text{ km/h}$$

γ) Όταν $\theta = \dfrac{4\pi}{3} \overset{(3)}{\Rightarrow} 2t = \dfrac{4\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{2\pi}{3}$

$$(4) \Rightarrow \ell'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = -2 \text{ km/h}$$

14.

Ένας αγρότης θέλει να προσλάβει εργάτες για να μαζέψουν 12500 κιλά ντομάτες. Κάθε εργάτης μαζεύει 125 κιλά την ώρα και πληρώνεται 6 ευρώ την ώρα.
Για τον συντονισμό και επιστασία των εργατών ο αγρότης θα προσλάβει και ένα επιστάτη τον οποίο θα πληρώνει 10 ευρώ την ώρα.
Ο αγρότης, επιπλέον, θα πληρώσει και στο σωματείο των εργατών εισφορά 10 ευρώ για τον επιστάτη και κάθε εργάτη .
Να βρείτε πόσους εργάτες πρέπει να προσλάβει ο αγρότης για να του κοστίσει το ελάχιστο δυνατόν και πόσο θα είναι το ελάχιστο κόστος.

Λύση

Έστω ότι ο αγρότης θα προσλάβει x εργάτες και έναν επιστάτη και ότι χρειάζονται t ώρες να μαζευτούν οι ντομάτες.
Αφού ο κάθε εργάτης μαζεύει 125 κιλά ντομάτες την ώρα, στις t ώρες θα μαζέψει $125 \cdot t$ κιλά ντομάτες.

Οπότε όλοι οι εργάτες στις t ώρες θα μαζέψουν $125 \cdot t \cdot x$ κιλά ντομάτες, ποσότητα που είναι όλη η παραγωγή. Άρα $125xt = 12500$

$$t = \frac{12500}{125x} = \frac{100}{x} \qquad \textbf{(1)}$$

Το συνολικό κόστος είναι $K = 6tx + 10t + 10(x+1) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$K(x) = 600 + \frac{1000}{x} + 10x + 10 \quad \text{με} \quad x > 0$$

$$K'(x) = -\frac{1000}{x^2} + 10 = \frac{10x^2 - 1000}{x^2}$$

$K'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10x^2 - 1000 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$ εφόσον $x > 0$

$K'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10x^2 - 1000 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 10$ εφόσον $x > 0$

Πρόσημο της K΄ και η μονοτονία της K

x	0 10 $+\infty$
K΄	$-$ 0 $+$
K	$\searrow$ $\nearrow$

Ελάχιστο. για $x = 10$ το $K(10) = 810$

Άρα ο αγρότης πρέπει να προσλάβει 10 εργάτες, οι οποίοι θα δουλέψουν $t = \frac{100}{10} = 10$ ώρες και το ελάχιστο κόστος θα είναι 810 ευρώ.